

Midtoets Vectoranalyse

26 mei 2009

De toets bestaat uit de onderstaande **drie** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (30 pt.)

In deze opgave bekijken we twee oppervlakken,

$$S \text{ gegeven door } z = x^2 + 5x + y^2 + 4y$$

$$T \text{ gegeven door } z = -x^2 + 5x - y^2 + 4y$$

die elkaar raken in een punt.

- Toon aan dat dit punt de oorsprong is en laat zien dat het raakvlak U beschreven wordt door $5x + 4y - z = 0$.
- Bekijk nu de sfeer $1 = x^2 + y^2 + z^2$. Er zijn twee punten waar het raakvlak aan de sfeer parallel is met U , het raakvlak aan S en T . Vind deze punten.

Opgave 2 (30 pt.)

Zij $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gegeven door $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ en zij $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ het vectorveld gegeven door $\mathbf{G}(x, y, z) = (\cos y + \sin z, \cos z + \sin x, \cos x + \sin y)$.

- Bewijs dat $\nabla \cdot \nabla F = 0$.
- Bereken $\nabla \times \mathbf{G}$.
- Bereken $\nabla \cdot \mathbf{G}$. (Hint: dit kan ook zonder te rekenen!)

Opgave 3 (30 pt.)

Het vlak $x + y + z = 0$ en de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ snijden elkaar in een cirkel.

- Bepaal alle kandidaten voor extremen van de functie $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ op deze cirkel.
- Bepaal het type van deze kandidaten (minimum, maximum of zadelpunt).